9/12/19

Ασκήσεις Κεφ 3ο:
34, 36, 37, 40, 41, 50, 52

Τετάρτη 18/12/19
3 - 6
Δευτέρα 9/12/19
2 - 6
Δευτέρα 16/12/19
1 - 6

Θεώρημα: Έστω $I \neq \emptyset$ ιδεώδες του $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ και $<$ μονων. διάταξη. Το I διαθέτει μοναδική ανάγωγη βάση Gröbner ως προς την $<$.

Απόδειξη: Έστω $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ μία ελαχιστική βάση Gröbner του I.

$g_1 \xrightarrow[+]{H_1} h_1$, $H_1 = \{g_2, \dots, g_k\}$

$g_2 \xrightarrow[+]{H_2} h_2$, $H_2 = \{h_1, g_3, \dots, g_k\}$

$g_k \xrightarrow[+]{H_k} h_k$, $H_k = \{h_1, h_2, \dots, h_{k-1}\}$

Θεωρώ το σύνολο $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ ανάγωγη βάση Gröbner

Π.χ. $I = \langle x^2 + xy + y^2, x+y, y \rangle$ $y > x$, $<_{lex}$

$G = \{y + x, x\}$

$y + x - \frac{x}{x} x = y = h_2$ ανάγωγο

Καθολική βάση Gröbner

Ορισμός: Έστω $I \neq \emptyset \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Η ένωση όλων των αναγωγών βάσεων Gröbner του I, ορίζεται ως καθολική (universal) βάση Gröbner και συμβολίζεται με U_I.

Αποδεικνύεται ότι είναι πεπερασμένο.

* Η καθολική βάση Gröbner είναι βάση Gröbner του I ως προς ΚΑΘΕ μονωνυμική διάταξη.

SOS

ΠΧ $I = \langle f_1 = x - y^2,\ f_2 = \underset{lt(f_2)}{xy} - x \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ και έστω $G_1 = \{f_1, f_2\}$. Να βρεθεί η καθολική βάση Gröbner του I.

Παρατηρώ ότι $lt(f_2) = xy$
(καθώς $y > 1 \overset{x}{\Rightarrow} xy > x$)

Διακρίνω περιπτώσεις για το $lt(f_1)$

a) $lt(f_1) = x$

$$S(f_1, f_2) = \frac{xy}{x}(x - y^2) - \frac{xy}{xy}(xy - x)$$

$$= -y^3 + x \quad \text{(υπάρχει όρος που διαιρείται από μεγ.)}$$

$$= -y^3 + x \xrightarrow{f_1} -y^3 + x - \frac{x}{x}(x - y^2) = \underset{lt(f_3)}{-y^3} + y^2 \qquad (y > 1 \Rightarrow y^3 > y^2)$$

Έστω $G_2 = \{f_1, f_2, f_3 = -y^3 + y^2\}$

$S(f_1, f_2) \xrightarrow{G_2}_{+} 0$. Έχω ότι $S(f_1, f_3) \xrightarrow{G_2}_{+} 0$ καθώς $\text{μκδ}(lt(f_1), lt(f_3)) = 1$

$$S(f_2, f_3) = \frac{xy^3}{xy}(xy - x) - \frac{xy^3}{-y^3}(-y^3 + y^2)$$

$$= -y^2 x + xy^2 = 0$$

Άρα το $G_2 = \{f_1 = x - y^2,\ f_2 = xy - x,\ f_3 = -y^3 + y^2\}$ είναι βάση Gröbner

Την κάνω αναγωγή

Έστω $G_2' = \{ f_1 = x - y^2, \ f_3 = y^3 - y^2 \}$ ανάγωγη

β) $lt(f_1) = -y^2$, $G_1 = \{ \underset{f_1}{\underset{\shortparallel}{-y^2 + x}}, \underset{f_2}{\underset{\shortparallel}{xy - x}} \}$

$S(f_1, f_2) = \frac{xy^2}{-y^2}(-y^2 + x) - \frac{xy^2}{xy}(xy - x)$

$= -x^2 + xy \xrightarrow{f_2}$

$-x^2 + xy - \frac{xy}{xy}(xy - x) = -x^2 + x = f_3$

Έστω $G_2 = \{ f_1, f_2, f_3 = -x^2 + x \}$

$lt(f_3) = -x^2$ γιατί $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

$S(f_1, f_2) \xrightarrow[+]{G_2} 0$, $S(f_1, f_3) \xrightarrow[+]{G_2} 0$ καθώς $\text{μκδ}(lt(f_1), lt(f_3)) = 1$

$S(f_2, f_3) = \frac{x^2y}{xy}(xy - x) - \frac{x^2y}{-x^2}(-x^2 + x) = -x^2 + xy \xrightarrow[+]{f_2, f_3} 0$

Άρα, το $G_2 = \{ -y^2 + x, \ xy - x, \ -x^2 + x \}$

$G_2' = \{ y^2 - x, \ xy - x, \ x^2 - x \}$ ελαχιστική (κανένας αρχικός όρος δεν διαιρεί κανέναν)

(κανένας όρος δεν διαιρείται από μεγιστοβάθμιο άλλου.)

↓

Άρα, G_2' ανάγωγη

Επομένως $U_I = \{ x - y^2, \ y^3 - y^2, \ \cancel{y^2 - x}, \ xy - x, \ x^2 - x \}$

* Εφαρμογές των βάσεων Grobner *

① Έστω $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ και $φ \in K[x_1, \ldots, x_n]$
να απαντήσουμε αν $φ \in I$ και αν ναι, να γράφει το $φ$ ως συνδ. των $f_1, \ldots, f_k$.

Πρόβλημα ισότητας 2 ιδεωδών $I = J$

② Δοθέντος $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$I = J$; αν όχι ($I \neq J$) αν $I \subsetneq J$ ή αν $J \subsetneq I$ ή τίποτα απ' τα παραπάνω

ΠΧ① Έστω $I = \langle f_1 = yx^2 - 4x,\ f_2 = y^2 + x^2 - 5 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$

degrlex $y > x$

$h_1 = y^3 - 5y + 4x \in I$;

$h_2 = yx^2 + y^2 \in I$; αν κάποιο ανήκει να γραφεί ως γραμ. συνδ. των f_1, f_2.

Αρχικά, βρίσκω Gröbner G

$\Rightarrow \varphi \xrightarrow[+]{G} u$, το u μοναδικό

Ισχύει $\varphi \in I \iff \varphi \xrightarrow[+]{G} 0$

Με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$G = \{ yx^2 - 4x,\ y^2 + x^2 - 5,\ x^4 + 4yx - 5x^2 \}$ (ανάγωγη)

$$h_1 \xrightarrow[f_2]{G} y^3 - 5y + 4x - \frac{y^3}{y^2}(y^2 + x^2 - 5) = -5y + 4x - yx^2 + 5y$$

$$= -yx^2 + 4x \xrightarrow{f_1} -yx^2 + 4x - \frac{-yx^2}{yx^2}(yx^2 - 4x) = 0 \text{ άρα } h_1 \in I$$

$$h_1 - yf_2 = -yx^2 + 4x \Rightarrow h_1 = (-yx^2 + 4x) + yf_2$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = -f_1 + yf_2}$$

$h_2 \xrightarrow[+]{G} (\quad\quad) \neq 0$ Άρα, $h_2 \notin I$

ΠΧ② Εύρεση της ανάγωγης βάσης Gröbner του I ως προς $<$ (G_1)

-‖- -‖- J -‖- (G_2)

Ισχύει $I = J \iff G_1 = G_2$

Πχ $J = \langle \underbrace{x^2+z}_{f_1}, \underbrace{xy+y^2+z}_{f_2}, \underbrace{xz-y^3-2yz}_{f_3}, \underbrace{y^4+3y^2z+z^2}_{f_4} \rangle$

$I = \langle \underbrace{x^2+z}_{g_1}, \underbrace{xy+y^2+z}_{g_2}, \underbrace{x^3-yz}_{g_3} \rangle \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ lex $x>y>z$

• $G_J = \{ x^2+z, xy+y^2+z, xz-y^3-2yz, y^4+3y^2z+z^2 \}$

$g_1, g_2 \in J$ και $g_3 \xrightarrow[+]{G_J} -y^3-3yz \neq 0$ ανάγωγο

άρα $g_3 \notin J$

άρα $I \not\subset J$

• Εύρεση βάσης Gröbner για το I.

$G_I = \{ x^2+z, xy+y^2+z, x^3-yz, \underbrace{-xz+y^3+2yz}_{g_4}, -y^4-3y^2z-z^2 \}$

Στη διαδικασία εύρεσης κάποια στιγμή φτάσαμε εδώ:

Παρατηρώ ότι, κάθε f_i βρέθηκε στο G_I (κι ας μην έχει ολοκληρωθεί)

$\Rightarrow f_i \xrightarrow{\underbrace{G_I \cup \{\,\}}_{\text{βάση Gröbner}}} 0 \iff f_i \in I$ άρα $J \subset I$.